

행렬 가중치를 갖는 네트워크 시스템의 적응 선도자 추종

Adaptive Leader Following of Matrix Weighted Network

이 성 렬^{*}

(Sungryul Lee^{1,*})

¹Dept. of Embedded Software, Kunsan National University

Abstract: This study investigates adaptive leader-following in linear multi-agent systems under matrix weighted networks. The proposed protocol employs switching logic to adjust coupling weights in a piecewise-constant manner using only local information from neighboring agents. Therefore, the proposed protocol is completely decentralized and independent of global information about network topology. The method's effectiveness is demonstrated through a numerical example of a matrix weighted network.

Keywords: adaptive leader following, multi-agent systems, switching logic, matrix weighted network

1. 서론

최근 다개체 시스템의 일치 문제는 스칼라 가중치 그래프를 이용한 전통적인 네트워크 환경에서 확장되어, 행렬 가중 네트워크(matrix-weighted network)를 기반으로 한 새로운 형태의 일치 문제로 발전하고 있다. 행렬 가중치 네트워크에서는 개체 사이의 상호 작용의 세기는 스칼라 값이 아닌 준양행정 대칭행렬로 표현되며, 스칼라 가중치 네트워크와 비교하여 개체간의 결합 특성을 보다 정확히 모델링할 수 있다. 이러한 행렬가중치 네트워크는 오피니언 동역학, 방향각 기반 대 형제어, 결합 오실레이터 동역학, 분산제어 및 추정 등과 같은 다양한 실제 시스템에 응용이 가능하므로 최근에 활발히 연구되고 있다[1-3].

[1]에서는 최초로 행렬 가중치를 갖는 라플라시안(matrix-weighted Laplacian)을 기반으로 한 동기화 조건을 제시하여, 이 분야의 기초를 마련하였고 이를 기반으로 [2]에서는 행렬 가중치를 갖는 소진동(small oscillation) 시스템의 동기화를 분석하였다. [3]은 행렬 가중치 그래프로 연결된 1차 적분기 네트워크의 일치를 위한 필요충분조건을 개발하였다. [4]에서는 이를 선도자 추종문제(leader-following)로 확장하는 연구를 수행하였고 [5]에서는 이산시간 시스템으로 확장하는 연구를 수행하였다. [6]에서는 기존의 1차 적분기 시스템에 대한 연구를 2차 적분기 시스템으로 확장하였고, 이후 [6]의 연구를 이산시간 2차 적분기 시스템[7], 스위치(switched) 시스템으로 [8] 확장하였다. [9,10]은 스위칭 토폴로지 조건하에서 일치 및 클러스터 일치 문제를 해결하였다. [11]은 모델 불확실성이 존재하는 시스템에서 적응 일치 알고리즘을 제안하였다.

지금까지 행렬 가중치 네트워크의 일치문제에 대하여 많은 연구가 이루어져 왔으나 1차 또는 2차 적분기 시스템과 같은 제한된 시스템만을 다루었고 일치 제어기 설계를 위하여 라플라시안 행렬과 같은 전역정보를 필요로 한다는 점에서 단점을 갖는다. 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 기존

의 행렬가중치 네트워크의 일치연구를 더 일반적인 형태를 갖는 시스템으로 확장하고 네트워크의 라플라시안 행렬과 같은 전역정보를 필요로 하지 않는 적응 일치 연구가 필요하다.

현재까지 대부분의 적응일치연구는 스칼라 가중치 네트워크를 다루었고 행렬 가중치 네트워크의 적응일치 연구는 거의 이루어지지 않고 있다. [12,13]에서 1차 또는 2차 스칼라 가중치 네트워크 시스템에 대하여 로컬정보만을 이용하는 적응일치기법을 제안하였고 이러한 초기의 연구들은 [14-16]에서 고차선형시스템으로 확장되었다. [17,18]에서는 이전의 연구결과를 출력 피드백 적응제어기 설계로 확장하였다. [19]에서는 비선형 시스템의 선도자 추종 적응일치기법을 제안하였다. 앞에서 설명한 대부분의 적응일치기법들은 적응이득의 설계가 리아푸노프함수의 형태에 의존하므로 매우 복잡한 구조를 가지며 일반적인 유도방법이 존재하지 않는 단점이 있다. 한편, [20,21]에서는 비선형 다개체시스템의 에지 기반의 적응일치기법을 제안하였다. [22,23]에서는 에지 기반의 적응일치기법에서 다양한 형태의 업데이트 규칙을 개발하였다. [20-23]에서 제안한 기법들은 조정해야 할 적응 파라미터의 수가 매우 많기 때문에 연산량이 매우 크다는 단점을 지닌다. 이러한 적응일치기법의 문제점을 해결하기 위하여 최근에 [24]에서 스위칭 로직 기반의 적응일치기법을 제안하였다. [24]의 결과는 기존 적응제어기와 비교하여 단순한 구조를 가지고 존재하는 비적응제어기와 제안한 스위칭 로직을 결합함으로써 제어기 설계 및 안정도 해석이 매우 쉬워지는 장점을 가진다.

본 논문에서는 기존연구의 1차 또는 2차 적분기 시스템보다 더 일반적인 선형시스템으로 이루어진 행렬 가중치 네트워크의 적응 선도자 추종제어기를 제안한다. 먼저, 스칼라 가중치 시스템과 마찬가지로 제어기의 분산형 상수 이득이 충분히 크다면 선도자 추종을 달성할 수 있음을 증명한다. 또한, 제어기의 존재성이 가중치 행렬의 고유값에 의해 결정된

* Corresponding Author

Manuscript received October 24, 2025; revised November 5, 2025; accepted November 17, 2025

이성렬: 군산대학교 임베디드소프트웨어학과 교수(2sungryul@kunsan.ac.kr, ORCID[®] 0000-0001-9717-176X)

을 증명한다. 이러한 결과를 바탕으로 제어기의 분산형 이득을 선도자 추종을 달성하도록 시간이 증가함에 따라 충분히 증가시켜주는 스위칭 로직 기반의 적응제어기를 제안한다. 기존 적응제어기법과 다르게 제어기 설계와 스위칭 로직의 설계가 독립적으로 이루어 지므로 기존의 복잡한 제어기 설계 및 안정도 해석이 매우 단순해질 수 있음을 보인다. 결과적으로 기존의 행렬 가중치 네트워크 연구의 적용범위를 확장함과 동시에 제어기 설계를 위해 네트워크 그래프의 전역 정보를 필요로 하지 않는다는 점에서 스칼라 가중치 네트워크의 적응제어기법을 처음으로 행렬 가중치 시스템으로 확장했다는 점에서 기여를 가진다.

II. 문제 정의

다음과 같은 선형 다개체 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + u_i(t), \quad (1)$$

위 식에서 $i=1, \dots, N$, $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 추종자 개체 번호, 추종자 개체의 상태 변수, 입력을 각각 나타낸다. 행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 상수 행렬이다. 선도자 개체는 추종자의 영향을 받지 않으므로 선도자 개체의 입력은 $u_0(t) = 0$ 으로 가정한다. 따라서, 선도자 상태변수 $x_0(t)$ 의 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t) \quad (2)$$

추종자 시스템 (1)의 네트워크 토폴로지는 무방향(undirected) 그래프 $G=(V, E, A)$ 에 의하여 정의된다. $V=\{1, \dots, N\}$ 는 노드 집합, $E \subset V \times V$ 는 에지 집합을 나타낸다. $A=\{A_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} | (i, j) \in E, A_{ij} = A_{ji}^T = A_{ji} \geq 0\}$ 는 그래프 G 의 인접행렬을 나타내고 원소 A_{ij} 는 에지 $(i, j) \notin E$ 이면 $A_{ij}=0$ 이다. $L=\{L_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$ 은 그래프 G 의 라플라시안 행렬을 나타내고 원소 L_{ij} 는 $i \neq j$ 이면 $L_{ij} = -A_{ij}$ 이고 그렇지 않으면 $L_{ii} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$ 으로 정의한다. 정의에 의하여 L 은 대칭행렬이 된다. 가중치 행렬 $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 은 i 번째 추종자와 선도자사이의 연결상태를 정의하며 i 번째 추종자가 선도자와 연결되어 있으면 $A_0 \geq 0$ 이고 그렇지 않으면 $A_0 = 0$ 으로 정의한다.

가정 1 [3]: 라플라시안 행렬 L 은 다음을 만족시킨다.

$$\text{null}(L) = \text{range}(1_N \otimes I_n) \quad (3)$$

null 은 행렬의 영공간을 의미하며 range 는 행렬의 열공간을 의미한다.

가정 2 [4]: 가중치 행렬 A_0 는 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{i=1}^N A_0 > 0 \quad (4)$$

보조정리 1 [4]: 가정 1,2가 만족한다면 행렬 $L + \bar{A}$ 은 양한 정행렬이다. 여기서 $\bar{A} = \text{diag}(A_0, \dots, A_0)$.

보조정리 2 [25]: 시간함수 $f(t)$ 가 유한하고 제곱적분 가능하고 $\dot{f}(t)$ 가 유한하다면 $t \rightarrow \infty$ 이면 $f(t) \rightarrow 0$ 이다.

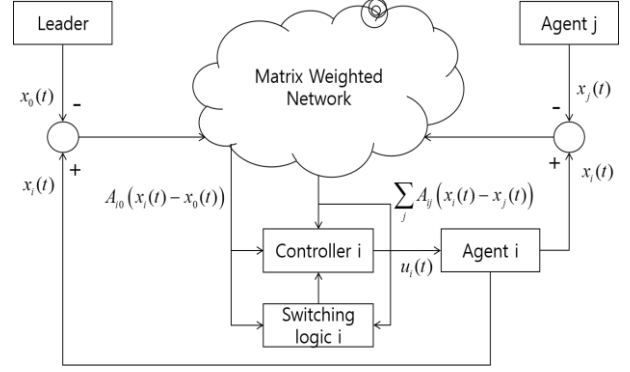


그림 1. 선도자 추종제어 블록도.

Fig. 1. Leader following of matrix weighted network.

고찰 1: 가정 1은 라플라시안 행렬의 영공간의 차원이 각 개체의 차원인 n 과 같음을 의미하고 이것은 행렬 L 이 n 개의 0의 고유값을 가짐을 의미한다. 또한, N 개의 추종자들이 일치에 도달하기 위한 필수조건이다. 가정 2는 선도자 개체의 모든 상태변수가 적어도 하나의 추종자 개체에게 전달될 수 있음을 의미한다. 가중치 행렬이 $A_0 \geq 0$ 이면 선도자 개체의 상태변수의 일부가 추종자에게 전달되지 않을 수 있다. 따라서 선도자의 모든 상태변수가 추종자들에게 전달될 수 있음을 보장하는 조건이다.

다음에서 본 논문에서 다룰 다개체 시스템의 선도자 추종 문제를 정의한다.

정의 1: 다개체 시스템의 선도자 추종문제는 다음 식 (5)를 만족시키는 추종자의 제어입력 $u_i(t)$ 를 설계하는 문제이다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \text{ for } i=1, \dots, N \quad (5)$$

III. 본론

먼저, 분산형 상수 이득을 갖는 선도자 추종 제어기를 제안하고 안정도 분석을 제시한다. 다음과 같은 제어기를 고려해보자

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\theta_i z_i(t) \\ z_i(t) &= \sum_{j=1}^N A_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) + A_0 (x_i(t) - x_0(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

위 식에서 $i=1, \dots, N$ 이고 $\theta_i > 0$ 는 분산형 상수 계인이다. 제안한 추종 제어기 (6)은 이웃한 개체로부터 받는 정보만을 이용하고 θ_i 는 각 개체별로 정의된다는 점에서 완전히 분산적이다. 다음 정리에서 θ_i 가 충분히 크다면 식 (5)를 만족시킬 수 있음을 증명한다.

정리 1: 다개체 시스템 (1), (2)가 가정 1, 2를 만족시킨다고 하자. 그러면, 모든 $\theta_i > \theta^*$ 에 대하여 제어기 (6)이 식 (5)를 만족시키도록 하는 $\theta^* > 0$ 가 항상 존재한다.

증명: 먼저 선도자 추종 오차를 $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$ 으로 정의하자. 식 (1), (2), (6)을 고려하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}_i(t) = Ae_i(t) - \theta_i \sum_{j=1}^N A_{ij} (e_i(t) - e_j(t)) - \theta_i A_0 e_i(t) \quad (7)$$

$e(t), \Theta, \bar{A}$ 를 각각 다음처럼 정의하자.

$$\begin{aligned} e(t) &= (e_1^T(t), \dots, e_N^T(t))^T, \\ \Theta &= \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_N) \otimes I_n, \\ \bar{A} &= \text{diag}(A_{10}, \dots, A_{N0}) \end{aligned} \quad (8)$$

그러면 식 (7)은 다음처럼 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (I_N \otimes A)e(t) - \Theta L e(t) - \Theta \bar{A} e(t) \\ &= (I_N \otimes A)e(t) - \Theta (L + \bar{A})e(t) \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)의 안정도 해석을 위하여 다음과 같은 리아푸노프 후보함수를 고려해보자.

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t) \Theta^{-1} e(t) \quad (10)$$

식 (10)의 시간에 대한 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \Theta^{-1} \dot{e} \\ &= e^T \Theta^{-1} (I_N \otimes A) e - e^T \Theta^{-1} \Theta (L + \bar{A}) e \\ &= e^T \Theta^{-1} (I_N \otimes A) e - e^T (L + \bar{A}) e \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^T \frac{1}{\theta_i} A e_i - e^T (L + \bar{A}) e \\ &\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{\theta_i} (\|A\| - \lambda_{\min}(L + \bar{A}) \theta_i) \|e_i\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

보조정리1에 의하여 행렬 $(L + \bar{A})$ 의 모든 고유값은 0보다 크고 $\lambda_{\min}(L + \bar{A})$ 는 최소 양의 고유값을 의미한다. 임의의 $\alpha > 0$ 에 대하여 모든 θ_i 를 다음식을 만족하도록 선택한다.

$$\theta_i \geq \frac{1}{\lambda_{\min}(L + \bar{A})} (\|A\| + \alpha) = \theta^* \quad (12)$$

그러면 식 (11)은 다음처럼 변환된다.

$$\dot{V} \leq -\alpha V \quad (13)$$

식 (13)은 $t \rightarrow \infty$ 이면 $e(t) \rightarrow 0$ 을 의미하고 이것은 다시 식 (5)를 의미한다. ■

고찰 2: 비록 제어기 (6)이 분산형 계인을 갖더라도 그것은 식(12)를 만족시켜야 한다. 이것은 시스템 행렬과 라플라시안 행렬의 완전한 정보가 필요하다. 이것은 실제시스템에서 얻기 어렵다. 따라서, 그래프 정보를 필요로 하지 않는 적응 제어가 필요하다.

식 (6)의 문제점을 해결하기 위하여 [24]에서 제안한 스위칭 로직 기반의 적응제어기를 제안한다.

$$u_i(t) = -\theta_i(t) z_i(t) \quad (14)$$

위 식에서 $\theta_i(t)$ 는 적응 이득이고 다음 스위칭 로직 (15)에 의하여 갱신된다.

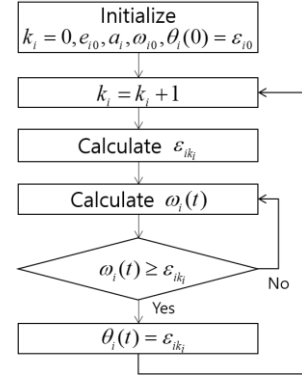


그림 2. 스위칭 로직의 순서도.

Fig. 2. Flow chart of switching logic.

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= \epsilon_{ik_i}, \text{ if } \epsilon_{ik_i} \leq \omega_i(t) < \epsilon_{i(k_i+1)}, \theta_i(0) = \epsilon_{i0}, \\ \epsilon_{ik_i} &= \epsilon_{i0} a_i^{k_i}, k_i = 0, \dots, \infty, \\ \dot{\omega}_i(t) &= \sigma_i \|z_i(t)\|^2, \omega_i(0) = \omega_{i0} \end{aligned} \quad (15)$$

위 식에서 $\epsilon_{i0} > 0, a_i > 1, \omega_{i0}, \sigma_i > 0$ 는 설계변수이고 k_i 는 i 번째 개체의 스위칭 횟수를 의미한다. 적응이득 $\theta_i(t)$ 는 추종오차가 미리 정해진 값보다 커질때마다 스위칭이 발생하고 계단함수 형태로 이득을 증가시킨다. 따라서, 스위칭 시점 사이의 부분구간에서 상수이며 시간이 증가함에 따라 계단식으로 단조 증가한다. 스위칭 로직 (15)에 대한 자세한 동작은 그림2의 순서도를 참고하라.

정리 2: 만약 시스템 (1), (2)이 가정 1, 2를 만족시킨다면 적응 제어기 (14), (15)는 식 (5)를 만족시킨다. 또한 다음 식을 만족시키는 상수 θ_i^* 가 항상 존재한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t) = \theta_i^* > 0 \quad (16)$$

증명: 증명은 3단계로 구성된다. 첫 번째, 스위칭 순간사이의 시간구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서는 적응 이득이 상수이므로 해석이 매우 쉽다. 따라서, 시간구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서 추종 오차의 안정도를 분석한다. 여기서 t_k 는 k 번째 스위칭 순간을 의미한다. 두 번째로 정리 1로부터 이득이 충분히 크다면 추종오차는 0으로 수렴한다. 이로부터 적응이득은 충분히 증가한 후 유계됨을 예상할 수 있다. 따라서, 적응 이득 $\theta_i(t)$ 의 유계성을 분석한다. 마지막으로 모든 $t \rightarrow \infty$ 에서 추종오차의 점근적 안정도를 증명한다.

먼저 시간구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서 추종 오차의 안정도를 분석한다. 시간구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서 $\theta_i(t)$ 는 상수이므로 $\theta_i(t) = \theta_i^k$ 으로 가정하자. 그러면 정리 1의 증명과 같은 방법으로 모든 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 에 대하여 다음을 얻는다.

$$\dot{e}(t) = (I_N \otimes A)e(t) - \Theta_k (L + \bar{A})e(t) \quad (17)$$

위 식에서 $\Theta_k = \text{diag}(\theta_1^k, \dots, \theta_N^k) \otimes I_n$ 이다. 식 (17)의 안정도 분석을 위하여 다음과 같은 리아푸노프 후보함수를 고려해보자.

$$V_k(t) = \frac{1}{2} e^T(t) \Theta_k^{-1} e(t) \quad (18)$$

식 (13)을 고려하면 $\theta_i^* > \theta^*$ 이면 모든 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 에 대하여 $\dot{V}_k/V_k \leq -\alpha$ 을 얻을 수 있고 양변을 t_k 에서 t 까지 적분하면 다음을 얻는다.

$$V_k(t) \leq V_k(t_k) e^{-\alpha(t-t_k)} \quad (19)$$

또한, 리아푸노프 함수의 성질로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\Theta_k^{-1}) \|e(t)\|^2 \leq V_k(t) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Theta_k^{-1}) \|e(t)\|^2 \quad (20)$$

위 식에서 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 는 각각 행렬의 고유값의 최소값과 최대값을 의미한다. 식 (19)와 (20)을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\Theta_k^{-1}) \|e(t)\|^2 \leq V_k(t_k) e^{-\alpha(t-t_k)} \quad (21)$$

$e_{k0} = 2V_k(t_k) \lambda_{\min}^{-1}(\Theta_k^{-1})$ 으로 정의하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\|e(t)\|^2 \leq e_{k0} e^{-\alpha(t-t_k)} \quad (22)$$

두 번째로 귀류법을 이용하여 스위칭 로직 (15)에 의하여 발생하는 스위칭이 유한번 발생함을 증명한다. 먼저, 반대로 스위칭이 무한번 발생한다고 가정해보자. 그러면, 식 (15)에 의하여 $k \rightarrow \infty$ 에 따라 $\theta_i(t) \rightarrow \infty$ 이다. 이 사실은 모든 $t \geq t_k$ 에 대하여 $\theta_i(t) > \theta^*$ 를 만족시키는 t_k 가 존재함을 의미한다. $\omega_i(t)$ 의 유계성을 증명하기 위하여 $\Delta\omega_i = \omega_i(t_{k+1}) - \omega_i(t_k)$ 을 정의하자. $z(t) = (z_1^T(t), \dots, z_N^T(t))^T$ 으로 정의하면 다음 식을 얻는다.

$$z(t) = (L + \bar{A})e(t) \quad (23)$$

식 (15), (22), (23)를 고려하면 모든 $k \geq \bar{k}$ 에 대하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta\omega_i &= \int_0^{t_{k+1}} \|z_i(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^{t_k} \|z_i(\tau)\|^2 d\tau \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|z_i(\tau)\|^2 d\tau \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|z(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \|(L \otimes I_n)\|^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|e(\tau)\|^2 d\tau \\ &= \frac{\|(L \otimes I_n)\|^2 e_{k0}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t_{k+1}-t_k)}) \\ &\leq \frac{\|(L \otimes I_n)\|^2 e_{k0}}{\alpha} = \bar{\omega} \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)로부터 모든 $k \geq \bar{k}$ 에 대하여 $\Delta\omega_i \leq \bar{\omega}$ 를 만족시키는 상수 $\bar{\omega} > 0$ 가 존재한다. 이것은 스위칭때 발생하는 $\omega_i(t)$ 의 증가량이 유계됨을 의미한다. 비슷하게 $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_{i(k_i+1)} - \varepsilon_{ik_i}$ 을 정의하면 식 (15)를 고려하면 $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_{i0}(a_i - 1)a_i^{k_i}$ 이고 $k_i \rightarrow \infty$ 에 따라 $\Delta\varepsilon_i \rightarrow \infty$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\Delta\varepsilon_i > \bar{\omega}$ 를 만족시키는 유한한 k_i 가 항상 존재한다. 이것은 스위칭이 유한번

만 발생함을 의미하고 스위칭이 무한번 발생한다는 가정과 모순되므로 귀류법에 의하여 스위칭은 유한번만 발생함이 명백하다. 결론적으로 $\theta_i(t)$ 는 감소하지 않고 유계된다. 따라서, 식 (16)을 얻을 수 있다. 마지막 단계로서 추종오차 $e(t)$ 의 점근적 안정도를 증명해보자. 마지막 스위칭이 발생한 시점을 t_s 으로 정의하자. 모든 $t \geq t_s$ 에 대하여 $\theta_i(t) = \theta_i^s$ 를 만족시키는 θ_i^s 가 반드시 존재한다. 이 사실을 고려하면 모든 $t \geq t_s$ 에 대하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (I_N \otimes A)e(t) - \Theta^s (L + \bar{A})e(t) \\ &= \bar{A}e(t) + \bar{B}e(t) \end{aligned} \quad (25)$$

위 식에서 $\Theta^s, \bar{A}, \bar{B}$ 는 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned} \Theta^s &= \text{diag}(\theta_1^s, \dots, \theta_N^s) \otimes I_n, \Theta^* = \text{diag}(\theta_1^*, \dots, \theta_N^*) \otimes I_n, \\ \bar{A} &= (I_N \otimes A) - \Theta^* (L + \bar{A}), \bar{B} = (\Theta^* - \Theta^s) (L + \bar{A}) \end{aligned} \quad (26)$$

식 (25)의 안정도 해석을 위하여 리아푸노프 함수 $V_s(t) = 1/2 e^T \Theta^{*-1} e$ 를 고려하면 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{V}_s(t) \leq -\alpha V_s(t) + c_0 \|e(t)\|^2 \leq c_0 \|e(t)\|^2 \quad (27)$$

위 식에서 $c_0 = \|\Theta^{*-1} \bar{B}\|^2$ 이다. 식 (27)의 양변을 적분하면 다음을 얻는다.

$$V_s(t) \leq V_s(t_s) + c_0 \int_{t_s}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau \quad (28)$$

식 (15)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\omega_i(t) = \int_0^t \|z_i(\tau)\|^2 d\tau \quad (29)$$

$\theta_i(t)$ 의 유계성으로부터 $\omega_i(t)$ 의 유계성을 알 수 있고 식 (29)로부터 $z(t)$ 는 제곱적분 가능하다. 식 (23)과 보조정리 1로부터 $e(t) = (L + \bar{A})^{-1} z(t)$ 이므로 $e(t)$ 도 제곱 적분 가능함을 의미한다. 또한, 식 (28)의 우변이 유계되므로 $V_s(t)$ 는 유계되고 이로부터 $e(t)$ 는 유계된다. 더욱이 식 (25)의 우변이 유계되므로 $\dot{e}(t)$ 도 유계이다. 따라서, 보조정리2에 의하여 $t \rightarrow \infty$ 이면 $e(t) \rightarrow 0$ 이다. ■

고찰 3: 제어기 (14), (15)는 이웃한 개체로부터 받는 상태 정보 외에는 어떠한 정보도 사용하지 않고 스위칭 로직에 의하여 제어기의 계인을 자동으로 조정한다. 따라서 제안한 제어기는 전역정보를 사용하지 않으므로 완벽히 분산적이다. [4]의 결과는 선도자의 상태변수가 상수만을 가지고 1차 적분기 시스템에만 적용가능한 비적용제어기이고 제안한 제어기는 선도자와 추종자 모두 일반적인 선형시스템 형태를 가지고 라플라시안 행렬 정보를 필요로 하지 않는 적응제어기이다. [11]에서는 매칭조건을 만족하는 파라미터 불확실성을 갖는 1차 적분기 시스템을 다루었고 이런 불확실성은 기존의 적응제어기법으로 쉽게 보상이 가능하다. 본 논문의 제어기는 라플라시안 행렬과 시스템행렬의 불확실성을 보상할 수 있다는 점에서

장점을 가진다. 또한, 제안한 적응제어기가 [24]에서 제안한 것이지만 스칼라 가중치 네트워크 시스템의 결과를 행렬 가중치 시스템으로 확장했다는 점에서 의미를 가진다.

IV. 모의실험

예제 1: 다음과 같은 행렬을 갖는 식 (1)과 같은 형태의 1개의 선도자와 4개의 추종자로 구성된 시스템을 고려해보자.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

다개체 시스템은 그림 3과 같은 무방향 그래프로 연결되어 있고 가중치 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{20} = A_{30} = A_{40} = 0 \\ A_{12} &= A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{23} = A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_{24} &= A_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_{34} = A_{43} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ A_{33} &= A_{44} = A_{31} = A_{41} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)이 가정 1,2를 만족함을 보이는 것은 매우 쉽다. 따라서, 정리 2에서 제안한 방법을 적용 가능하다. 스위칭 로직의 설계 파라미터들은 $\varepsilon_{i0} = 0.2, a_i = 2, \omega_{0i} = 0, \sigma_i = 1, i = 1, \dots, 4$ 으로 설정한다. 모의실험을 위한 초기값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_0(0) &= (0, 1, 2)^T, x_1(0) = (1, 2, 3)^T, x_2(0) = (2, 3, 1)^T, \\ x_3(0) &= (-1, -2, -3)^T, x_4(0) = (-2, -3, -1)^T \end{aligned} \quad (32)$$

그림 4, 5, 6은 정리 2의 결과처럼 각 개체의 상태 변수가 선도자의 상태변수와 일치상태에 도달함을 보여준다. 그림 7은 각 개체의 적응 이득 $\theta_i(t)$ 이 부분적으로 상수이고 계단식으로 증가하고 모두 유계되고 상수값으로 수렴함을 보여준다.

예제 2: 다음과 같은 시스템 행렬을 갖고 1개의 선도자와 9개의 추종자로 구성된 다개체 시스템을 고려해보자.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

다개체 시스템은 그림 8과 같은 무방향 그래프로 연결되어 있고 선도자와 추종자 사이의 가중치 행렬은 다음과 같다.

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{i0} = 0, i = 3, 5, 6, 7, 8, 9 \quad (34)$$

추종자 사이의 가중치 행렬은 연결된 개체사이의 가중치는 단위행렬로 가정하고 나머지는 0이다. 가중치 행렬은 가정 1,2를 만족하므로 정리 2에서 제안한 방법을 적용 가능하다. 스위칭 로직의 설계 파라미터들은 예제 1과 같다. 그림 9,10은 9개의 추종자가 선도자의 상태변수와 일치상태에 도

달함을 보여주고 그림 11은 각 개체의 적응 이득 $\theta_i(t)$ 이 모두 유계되고 상수값으로 수렴함을 보여준다.

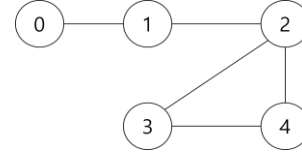


그림 3. 네트워크 그래프.

Fig. 3. Network graph.

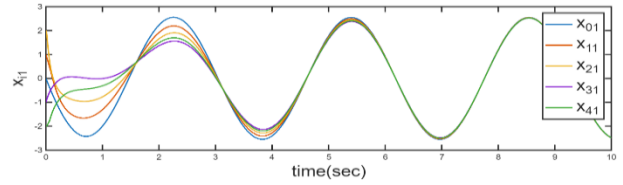


그림 4. $x_{i1}(t)$ 의 그래프.

Fig. 4. The graph of $x_{i1}(t)$.

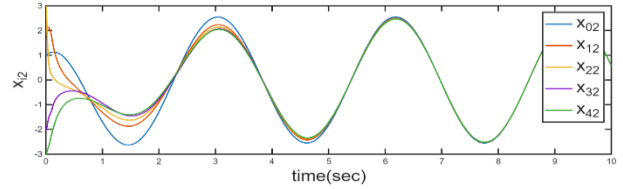


그림 5. $x_{i2}(t)$ 의 그래프.

Fig. 5. The graph of $x_{i2}(t)$.

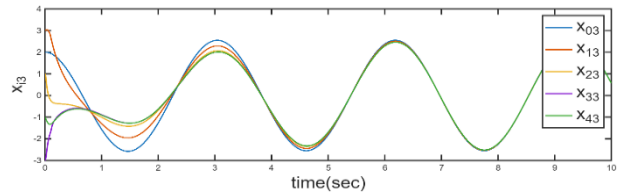


그림 6. $x_{i3}(t)$ 의 그래프.

Fig. 6. The graph of $x_{i3}(t)$.

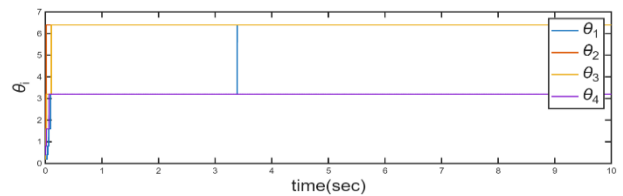


그림 7. $\theta_i(t)$ 의 그래프.

Fig. 7. The graph of $\theta_i(t)$.

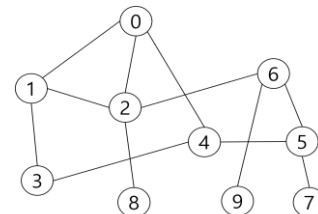


그림 8. 네트워크 그래프.

Fig. 8. Network graph.

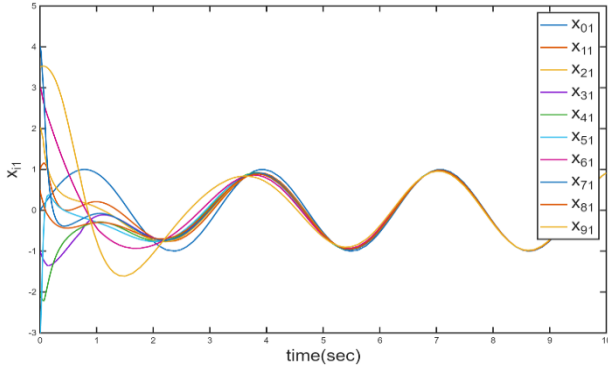


그림 9. $x_{i1}(t)$ 의 그래프.

Fig. 9. The graph of $x_{i1}(t)$.

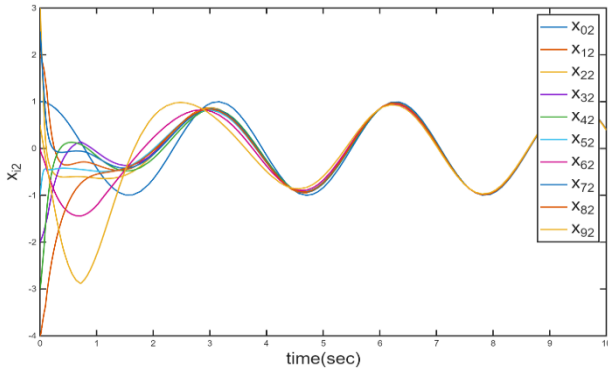


그림 10. $x_{i2}(t)$ 의 그래프.

Fig. 10. The graph of $x_{i2}(t)$.

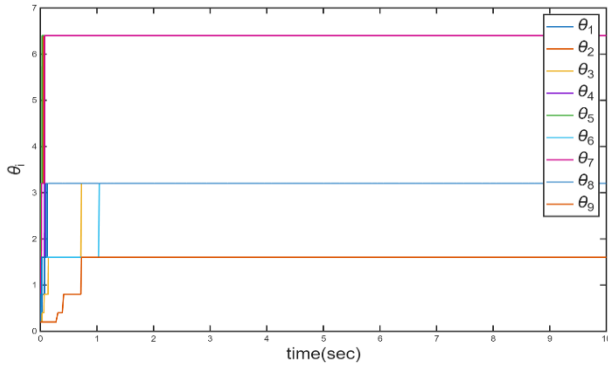


그림 11. $\theta_i(t)$ 의 그래프.

Fig. 11. The graph of $\theta_i(t)$.

V. 결론

본 논문에서는 행렬 가중치를 갖는 선형 다개체 시스템에 대한 선도자 추종제어기를 제안한다. 제안한 스위칭 로직 기반의 적응제어기는 모델 파라미터와 그래프정보를 필요로 하지 않는다는 점에서 장점을 가진다. 추후과제로서 비선형 시스템과 같은 일반적인 시스템으로 확장하는 연구가 필요하다.

REFERENCES

[1] S.E. Tuna, "Synchronization under matrix-weighted Laplacian," *Automatica*, vol. 73, pp. 76-81, 2016.

[2] S.E. Tuna, "Synchronization of small oscillations," *Automatica*, vol. 107, pp. 154-161, 2019.

[3] M.H. Trinh, C. Van Nguyen, Y.H. Lim, and H.S. Ahn, "Matrix-weighted consensus and its applications," *Automatica*, vol. 89, pp. 415-419, 2018.

[4] M. H. Trinh, M. Ye, H. -S. Ahn, and B. D. O. Anderson, "Matrix-weighted consensus with leader-following topologies," *Proc. of 2017 11th Asian Control Conference*, Australia, pp. 1795-1800, 2017.

[5] Q.V. Tran, M.H. Trinh, and H.-S. Ahn, "Discrete-time matrix-weighted consensus," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 8, no. 4, pp. 1568-1578, 2021.

[6] S. Miao and H. Su, "Second-order consensus of multiagent systems with matrix-weighted network," *Neurocomputing*, vol. 433, pp. 1-9, 2021.

[7] S. Miao, H. Su, and S. Chen, "Matrix-weighted consensus of second-order discrete time multi-agent systems," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 3539-3548, 2024.

[8] S. Miao and H. Su, "Second-order consensus of matrix-weighted switched multiagent systems," *Neurocomputing*, vol. 633, pp. 1-11, 2025.

[9] L. Pan, H. Shao, M. Mesbahi, Y. Xi, and D. Li, "Consensus on matrix-weighted switching networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 12, pp. 5990-5996, 2021.

[10] L. Pan, H. Shao, M. Mesbahi, D. Li, and Y. Xi, "Cluster consensus on matrix-weighted switching networks," *Automatica*, vol. 141, 2022.

[11] H.M. Nguyen, H.M. Nguyen, V.H. Pham, Q.V. Tran, C.V. Nguyen, M.H. Trinh, and H.-S. Ahn, "Adaptive consensus algorithms for matrix-weighted networks with parametric uncertainties," *Proc. of 2022 11th International Conference on Control, Automation and Information Sciences*, Vietnam, pp. 36-41, 2022.

[12] Z. Qu, C. Li, and F. Lewis, "Cooperative control with distributed gain adaptation and connectivity estimation for directed networks," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, pp. 450-476, 2014.

[13] J. Mei, W. Ren, and J. Chen, "Distributed consensus of second-order multi-agent systems with heterogeneous unknown inertias and control gains under a directed graph," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 8, pp. 2019-2034, 2015.

[14] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, "Consensus of multi-agent systems with general linear and lipschitz nonlinear dynamics using distributed adaptive protocols," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 7, pp. 1786-1791, 2013.

[15] Z. Li, G. Wen, Z. Duan, and W. Ren, "Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-Agent systems with Directed Graphs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 4, pp. 1152-1157, 2015.

[16] Y. Lv, Z. Li, Z. Duan, and G. Feng, "Novel distributed robust adaptive consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs and external disturbances," *International Journal of Control*, vol. 90, no. 2, pp. 137-147, 2016.

[17] Y. Lv, Z. Li, Z. Duan, and J. Chen, "Distributed adaptive output feedback consensus protocols for linear systems on directed graphs with a leader of bounded input," *Automatica*, vol. 74, pp. 308-314, 2016.

- [18] Y. Lv, Z. Li, and Z. Duan, "Distributed adaptive consensus protocols for linear multi-agent systems over directed graphs with relative output information," *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, no. 5, pp. 613-620, 2018.
- [19] Q. Song, G. Wen, W. Yu, D. Meng, and W. Lu, "Fully Distributed Synchronization of Complex Networks With Adaptive Coupling Strengths," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 52, no. 11, pp. 11581-11593, 2022.
- [20] P. DeLellis, M. diBernardo, and F. Garofalo, "Novel decentralized adaptive strategies for the synchronization of complex networks," *Automatica*, vol. 45, pp. 1312-1318, 2009.
- [21] W. Yu, P. DeLellis, G. Chen, M. di Bernardo, and J. Kurths, "Distributed adaptive control of synchronization in complex networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2153-2158, 2012.
- [22] L. Wang, Z. Sun, and Y. Cao, "Adaptive synchronization of complex networks with general distributed update laws for coupling weights," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, pp. 7444-7465, 2019.
- [23] B. Wei, F. Xiao, and Y. Shi, "Fully distributed synchronization of dynamic networked systems with adaptive nonlinear couplings," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 50, no. 7, pp. 2926-2934, 2020.
- [24] S. Lee, "Consensus of Linear Multi-Agent Systems using Switching Controller," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 28, no. 4, pp. 313-318, 2022.
- [25] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

이 성 렬

제어로봇시스템학회 논문지 제19권 제4호 참조.